Diferenciální struktura

Diferenciální varieta
Hladká zobrazení
Klasifikace dif. variet a struktur
Technikality

D: kompatibilita atlasů
  atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jsou C^r-kompatibilní (též C^r-ekvivalentní) $\equiv$
    $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ je C^r atlas
  C^r-kompatibilita je relace ekvivalence

D: diferenciální struktura
  třída C^r-ekvivalence atlasů se nazývá C^r-dif. struktura
  C^∞-dif. str. též hladká dif. str. či jen dif. str.

D: maximální atlas
  maximální atlas je sjednocení všech atlasů v dif. str.
  každý atlas je obsažen právě v jednom max. atlasu
 specifikace dif. str. je dána
  - libovolným atlasem z ní (praktické ale nejednozn.)
  - celou třídou kompat. atlasů
  - maximálním atlasem (jednozn. ale nepraktické)

D: diferencovatelná varieta
 dif. varieta třídy C^r je dvojice $(M, \mathcal{A})$ kde
  M je topologický prostor (Hausdorffovský) se spočet. bází topol.
  $\mathcal{A}$ je diferencov. str. třídy C^r
 místo $(M, \mathcal{A})$ budeme většinou psát M

souřadnicové oblasti max. atlasu tvoří bázi topologie
  podkladové top. pr.
dif. varieta by šla definovat bez apriorní topol. str. podkladové
  množiny M, ta lze naindukovat z atlasu
  nutno přidat axiomy zaručující Hausdorff a
  spočetnou bázi

Diferenciální varieta

historie:

Bernhard Riemann – habilitační přednáška 1867
lokalizace geometrie pomocí souřadnic a metriky
Hassler Whitney – moderní def. dif. variety

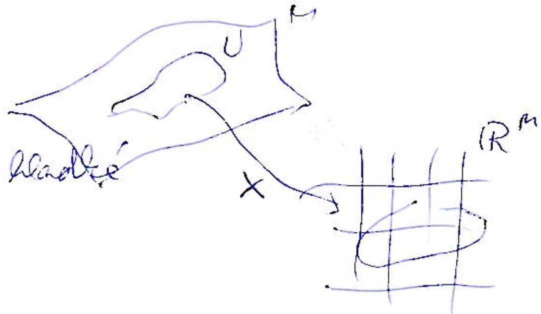
nechť M je topologická varieta se spočetnou bází top.
(second countable $\Rightarrow$ parakompakt + spoč. počet komponent)

D: souřadnicová mapa (U, x)

U otevř. oblast v M

$x : U \to \mathbb{R}^n$ $\quad x \equiv [x^1, \dots, x^n] \equiv [x^i]$ hladké

x^i nazýváme i-tou souř.
U nazýváme souř. oblastí



D: přechodové zobrazení

nechť (U, x), (V, y) jsou 2 mapy na M
přechodové zobr. je
$\alpha = x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ (přesněji $y^{-1}(U \cap V) \to x(U \cap V)$)

D: atlas třídy C^r (též C^r-atlas)

C^r-atlas je kolekce map (U_α, x_α) $\alpha \in$ index. mn.
- U_α tvoří otevřené pokrytí M
- všechna přechodová zobr. $x_{\alpha\beta} = x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ jsou třídy $C^r_{\text{na}}\mathbb{R}^n$

  C^0 – homeomorfismy (spojitá zobr.)
  C^r – spojité derivace stupně r
  C^∞ – spojité všechny derivace
  C^ω – analytické zobr. (konvergentní Tayl. rozvoj)

topologická var. má přirozený C^0 atlas
každý C^r-atlas je též C^s-atlas pro $s \le r$

Příklady

zúžení atlasu variety M na otevřenou podm. $N \subset M$
definuje atlas na N
N je otevřená podvarieta M

$\mathbb{R}^n$ a jeho otevřené podm. jsou dif. variety
$\mathbb{R}^n$ má přirozenou globální mapu generující
tzv. standardní dif. strukturu

sféra $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ s atlasem daným souborem
- sférických souř. s různými póly
- projekcí na různé roviny v $\mathbb{R}^{n+1}$

M, N dif. variety $\Rightarrow$ $M \times N$ je dif. varieta s atlasem
$(U_\alpha \times V_\beta, x_\alpha \times y_\beta)$ kde $(U_\alpha, x_\alpha) \in \mathcal{A}_M$ $(V_\alpha, y_\alpha) \in \mathcal{A}_N$

$T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ toroidy

Hladké zobrazení

D: hladké zobrazení mezi var. M, N

zobr $\phi : M \to N$ je třídy C^r $\equiv$

pro každou mapu (U, x) na M a (V, y) na N

$y \circ \phi \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je hladké ve smyslu $\mathbb{R}^k$

fce $\bar{y}^k(u^1, \dots, u^m)$ $k = 1 \dots n$ dané $\bar{y}^k(x^i(p)) = y^k(\phi(p))$

(tj. $[\bar{y}^k] = y \circ \phi \circ x^{-1}$)

nazýváme souřadnicové vyjádření zobr. ϕ

D: difeomorfismus

$\phi : M \to N$ je C^r-difeomorfismus $\equiv$

ϕ má inverzi ϕ^{-1}

ϕ i ϕ^{-1} jsou hladké

Diff(M, N) difeo z M do N

Diff M difeo na M (tj. $M \to M$)

tvoří grupu s operací skládání

D: hladké funkce

$f : M \to \mathbb{R}$ je fce třídy C^r $\equiv$

$\forall$ mapu (U, x) je $f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^r

fce třídy C^∞ nazýváme hladké a značíme $\mathcal{F}M$

D: hladké křivky

$\gamma : \mathbb{R} \to M$ nazýváme křivkou na M

hladkost zobr. určuje hladkost křivky

Klasifikace dif. variet a struktur

D: dvě dif. variety $(M, \mathcal{A}_M)$ a $(N, \mathcal{A}_N)$ jsou diffeo-ekvivalentní $\equiv$
existuje diffeomorf. $\Phi : M \to N$

D: dvě dif. str. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na top. var. M jsou diffeo-ekvivalentní $\equiv$
$(M, \mathcal{A}_1)$ a $(M, \mathcal{A}_2)$ jsou diffeo-ekvivalentní

diffeo ekviv. říká, že dif. struktury jsou v podstatě stejné

T: věta o zhlazení (Whitney)
každý maximální C^r atlas $r \geq 1$ na M obsahuje C^∞ a C^ω atlas na M
C^∞-podatlasu C^r atlasu říkáme zhlazení
C^r-atlas může obsahovat nekompatibilní C^∞ atlasy ale
všechny jsou si diffeo-ekvivalentní
jedná se o důsledek věty o vnoření

T: věta o vnoření (Whitney)
každá C^r dif. varieta lze vnořit jako C^∞ podvarieta
do $\mathbb{R}^{2n+1}$ (se stand. dif. str.)

není proto potřeba rozlišovat C^r-variety a C^∞-variety $(r \geq 1)$
každá taková var. lze "jednoznačně" zhladit na C^∞

T: každý C^r diffeomorfismus je též C^∞ diffeomorfism
?? po nějaké zhlazení ? (Whitney)

T: existují top. var. nepřipouštějící C^1-dif. str. (Kervaire 1960)

klasifikace - kolik diffeo nekviv. tříd dif. str. existuje na M
dim < 4 - 1 tř. dif. str.
dim > 4 kompaktní - konečně mnoho tř. dif. str.
počet nezávisí na top. strukt. kompaktní variety - stačí klasif. S^n

dim S^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
# tř. dif. str.	1	1	1	? ≥ 1	1	1	28	2	8	6	992	1	

dim $= 4$ typicky nekonečný počet
$\mathbb{R}^4$ nespočetně exotických tříd dif. struktur
S^4 hladká Poincarého hyp.: 1 tř. dif. str. (asi neplatí)
$\mathbb{R}^n$ dim > 4 1 tř. dif. str.

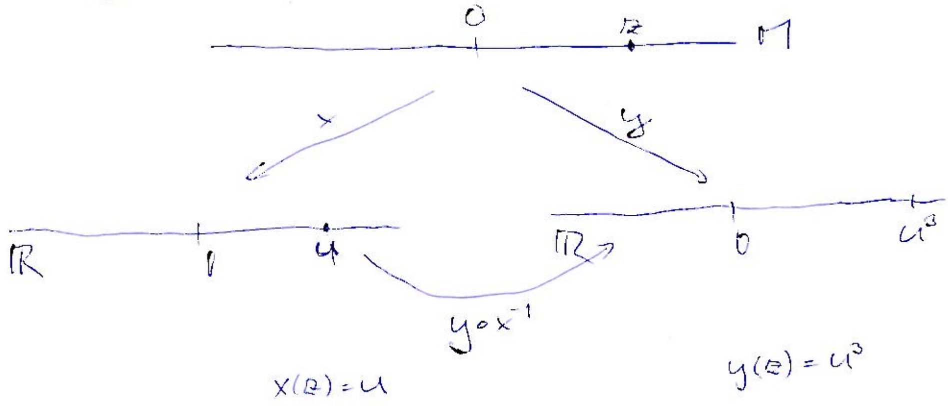
Příklad:

Diffeomorfně ekvivalentní nekompatibilní diferencovatelné struktury na 1-dim nekompaktní top. varietě M $(\mathbb{R})$

mapa (M,x) $\quad x: M \to \mathbb{R}$ globální 1-1 značení

mapa (M,y) $\quad y: M \to \mathbb{R}$ globální 1-1 značení

$y = x^3$ $\quad$ tj. $\quad y \circ x^{-1}(u) = u^3$



(M,x) tvoří atlas a indukuje dif. strukturu $\mathcal{A}_x$

M_x je odpovídající varieta $(M, \mathcal{A}_x)$

podobně

$(M,y) \to \mathcal{A}_y \to M_y$

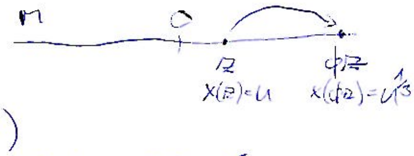
$\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y$ nejsou kompatibilní

$\Leftarrow$ mapy (M,x), (M,y) nekompatibilní

$\Leftarrow$ $x \circ y^{-1}(u) = u^{1/3}$ není hladké

M_x, M_y jsou diffeomorfní ekvivalentní

nechť $\phi: M \to M$, $\quad x(\phi z) = x(z)^{1/3}$



tj. $y(\phi z) = y(z)^{1/3} = x(z)$

$\phi \notin \mathrm{Diff}(M_x)$ $\Leftarrow$ $x \circ \phi \circ x^{-1}(u) = u^{1/3}$ není hladké

$\phi \notin \mathrm{Diff}(M_y)$ $\Leftarrow$ $y \circ \phi \circ y^{-1}(v) = v^{1/3}$ není hladké

$\phi \in \mathrm{Diff}(M_x, M_y)$ $\Leftarrow$ $y \circ \phi \circ x^{-1}(u) = u$ hladké s hl. inverzí

$\Downarrow$ M_x, M_y diffeomorfně ekvivalentní

ačkoli $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y$ jsou nekompatibilní

Technikality

D: rozklad jednotky na M $\equiv$
soubor hladkých fcí φ_α (lze volit C^n } $n = 0 \ldots \omega$) tak že
- $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$
- $\{ \operatorname{supp} \varphi_\alpha \}$ je lokálně konečné pokrytí
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ (je jen konečně nenulových členů)

D: rozklad jednotky je podřízen pokrytí M pokud
pro každou φ_α je $\operatorname{supp} \varphi_\alpha$ podmnož. některé z množin pokrytí

T: každé pokrytí má podřízený rozklad jednotky

germ zobrazení a fce
často nás zajímají jen lok vlastnosti zobr. či fce
kolem daného bodu,
stačí nám znát zobrazení (fci) jen v libovolně malém okolí bodu

D: dvě zobr $\phi, \psi : M \to N$ jsou ekvivalentní blízko x
$\phi \underset{x}{\sim} \psi \quad \equiv \quad \exists$ okolí U bodu x $\quad \phi|_U = \psi|_U$

$\underset{x}{\sim}$ je relace ekvivalence

D: třída ekvivalence $\underset{x}{\sim}$ zobrazení (fcí) se nazývá
germ zobrazení (fce)
pro germ lze def. hodnotu v x: $[\phi](x) = \phi(x)$
pokud $N = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mluvíme o germu fce v bodě x

germy fcí v bodě x tvoří komut. algebru
$[\phi] + [\psi] = [\phi + \psi] \qquad [\phi][\psi] = [\phi\psi] \qquad [1] = 1 \quad [0] = 0$